

Übungsaufgaben zum Thema Komplexe Zahlen

1. Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der trigonometrischen Form und in der Exponentialform an. Wie lauten die konjugiert-komplexen Zahlen dazu?

a) $z = -5 - j3$

$$r = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}$$

$z = 5,83(\cos 210,96^\circ + j \sin 210,96^\circ)$ $r = \sqrt{34} = 5,83$

$z = 5,83 \cdot e^{j211^\circ}$

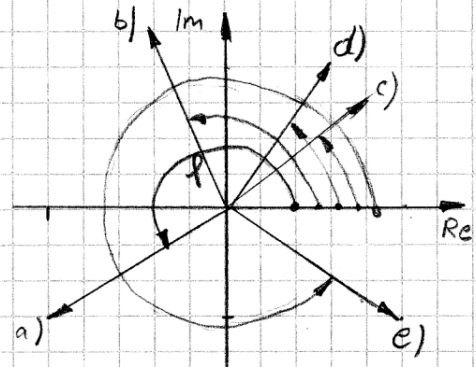
$$\tan \varphi = \frac{-3}{-5} = 0,6 \Rightarrow$$

$\varphi = 30,96^\circ$

b) $z = -1 + j3$

$z = 3,16(\cos 108,4^\circ + j \sin 108,4^\circ)$

$z = 3,16 \cdot e^{j108^\circ}$



c) $z = 4 + j3$

$z = 5(\cos 36,9^\circ + j \sin 36,9^\circ)$

$z = 5 e^{j36,9^\circ}$

$\varphi = 180^\circ + 30,96^\circ$

zu a) $\varphi = 210,96^\circ$

d) $z = 3 + 4j$

$z = 5(\cos 53,13^\circ + j \sin 53,13^\circ)$

$z = 5 \cdot e^{j53,13^\circ}$

e) $z = 5 - j3$

$z = 5,83(\cos 329^\circ + j \sin 329^\circ)$

$z = 5,83 \cdot e^{j329^\circ}$

Man könnte auch folgende Winkel in den Polarformen angeben:

$$1a) \underline{z} = 5,83 (\cos -149,04^\circ + j \sin -149,04^\circ)$$

$$\underline{z} = 5,83 \cdot e^{-j149^\circ}$$

$$b) \underline{z} = 3,16 (\cos -251,6^\circ + j \sin -251,6^\circ)$$

$$\underline{z} = 3,16 \cdot e^{-j251,6^\circ}$$

$$c) \underline{z} = 5 (\cos -323,1^\circ + j \sin -323,1^\circ)$$

$$\underline{z} = 5 e^{-j323,1^\circ}$$

$$d) \underline{z} = 5 (\cos -306,87^\circ + j \sin -306,87^\circ)$$

$$\underline{z} = 5 \cdot e^{-j306,87^\circ}$$

$$e) \underline{z} = 5,83 (\cos -31^\circ + j \sin -31^\circ)$$

$$\underline{z} = 5,83 \cdot e^{-j31^\circ}$$

$$2a) \underline{z} = \sqrt{34} (\cos 30,96^\circ + j \sin 30,96^\circ)$$

$$\underline{z} = \underbrace{5,83 \cdot 0,857}_{5} + \underbrace{5,83 \cdot j 0,5144}_{j3}$$

$$\underline{z} = 5 + j3 \quad \neq$$

$$2a) \underline{z} = 5,83 (\cos 149,04^\circ - j \sin 149,04^\circ)$$

$$\underline{z} = -5 - j3 \quad \checkmark$$

$$2e) \underline{z} = \sqrt{34} (\cos 149,04^\circ + j \sin 149,04^\circ)$$

$$\underline{z} = \underbrace{5,83 \cdot (-0,857)}_{-5} + \underbrace{5,83 \cdot j 0,5144}_{j3}$$

$$\underline{z} = -5 + j3 \quad \neq$$

$$\underline{z} = \sqrt{34} (\cos(-149,04^\circ) + j \sin(-149,04^\circ))$$

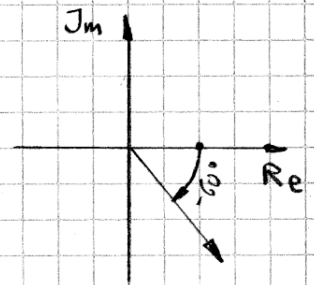
$$\underline{z} = \sqrt{34} \cdot (-0,857) + j \sqrt{34} \cdot (-0,514) \quad \underline{z} = -5 - j3 \quad \checkmark$$

2. Bilden Sie von den folgenden komplexen Zahlen die kartesische Form:

a) $\underline{z} = 5 (\cos 60^\circ - j \sin 60^\circ)$

$\underline{z} = 2,5 - j 4,33$ ✓

$\underline{z} = 5 (\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ))$



b) $\underline{z} = 3 (\cos 22,5^\circ - j \sin 22,5^\circ)$

$\underline{z} = 2,77 - j 1,15$ ✓

$\underline{z} = 3 (\cos(-22,5^\circ) + j \sin(-22,5^\circ))$

c) $\underline{z} = -2 (\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ)$

$\underline{z} = -2 (0,866 - j \cdot 0,5)$

$\underline{z} = -1,732 + j$ ✓

$\underline{z} = -2 (\cos(-30^\circ) + j \sin(-30^\circ))$

d) $\underline{z} = -\cos \pi + j \sin \pi$

$\underline{z} = -(-1) + j \cdot 0$

$\underline{z} = 1$ ✓

Taschenrechner
auf RAD umstellen!

e) $\underline{z} = -6 (\cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2})$

$\underline{z} = -6 (0 - j \cdot 1)$

$\underline{z} = +j6$

f) $\underline{z} = -\cos \frac{3\pi}{2} + j \sin \frac{3\pi}{2}$

$\underline{z} = 0 + j \cdot (-1)$

$\underline{z} = -j$ ✓

3. Berechnen Sie von folgenden komplexen Zahlen den Betrag:

$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{z} &= -5 - j3 & |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ |z| &= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} \\ \underline{|z|} &= \underline{5,83} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \underline{z} &= -j2 \\ |z| &= \sqrt{0^2 + (-2)^2} \\ \underline{|z|} &= \underline{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \underline{z} &= 2(\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ) \\ \underline{|z|} &= \underline{r = 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \underline{z} &= -2 \cdot e^{j60^\circ} \\ \underline{|z|} &= \underline{2} \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$\underline{z}_1 = 4 - j3 \text{ und } \underline{z}_2 = -5 - j3 \text{ die Terme}$$

$$a) \underline{z} = \underline{z}_1 - \underline{z}_2$$

$$\underline{z} = 4 - j3 - (-5 - j3)$$

$$\underline{z} = 4 - j3 + 5 + j3$$

$$\underline{z} = 9$$

$$b) \underline{z} = 4 - j3 + 0,5 \cdot (-5 - j3)$$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + 0,5 \cdot \underline{z}_2$$

$$\underline{z} = 4 - j3 - 2,5 - j1,5$$

$$\underline{z} = 1,5 - j4,5$$

$$c) \underline{z} = (4 - j3) \cdot (-5 + j3)$$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2^*$$

$$\underline{z} = -20 + 12j + 15j - (-1) \cdot 9$$

$$\underline{z} = -20 + 9 + j27$$

$$\underline{z} = -11 + j27$$

$$d) \underline{z} = \frac{\underline{z}_1}{2 \cdot \underline{z}_2}$$

$$\underline{z} = \frac{4 - j3}{2(-5 - j3)}$$

$$\underline{z} = \frac{(4 - j3)(-5 + j3)}{2(-5 - j3)(-5 + j3)}$$

$$\underline{z} = \frac{-20 + j12 + j15 + 9}{2(25 + 9)}$$

$$\underline{z} = \frac{-11 + j27}{68}$$

$$\underline{z} = -\frac{11}{68} + j\frac{27}{68}$$

$$\underline{z} = -0,162 + j0,397$$

5. Berechnen Sie folgende Potenzen mit der Formel von Moivre u. geben Sie die komplexen Zahlen in der algebraischen Form u. in der Exponentialform an:

$$a) \underline{z} = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} - j \sin \frac{\pi}{6} \right)^6$$

Formel von Moivre:

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + j \sin n\varphi$$

$$\underline{z} = 3 \left(\cos 6 \cdot \frac{\pi}{6} - j \sin 6 \cdot \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\underline{z} = 3 (\cos \pi - j \sin \pi)$$

$$\underline{z} = 3 (-1 - j \cdot 0)$$

$$\underline{\underline{z}} = \underline{\underline{-3}}$$

algebraische Form:

$$\underline{z} = 3(-1 - j \cdot 0)$$

$$\underline{z} = -3 - j \cdot 0$$

$$\underline{\underline{z}} = \underline{\underline{-3}}$$

Exponentialform:

$$\underline{\varphi} = \underline{\pi} \quad (\text{siehe trigonometrische Form})$$

$$r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2}$$

$$\underline{r} = \underline{3}$$

⇓

$$z = r \cdot e^{j\varphi}$$

$$\underline{\underline{z}} = \underline{\underline{3 \cdot e^{j\pi}}}$$

✓

$$\begin{aligned}
 56) \quad \underline{\underline{z}} &= 5 \cdot [\cos(-20^\circ) + j \sin(-20^\circ)]^3 \\
 \underline{\underline{z}} &= 5 \cdot [\cos 3 \cdot (-20^\circ) + j \sin 3 \cdot (-20^\circ)] \\
 \underline{\underline{z}} &= 5 \cdot [\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ)] \\
 \underline{\underline{z}} &= 5 \cdot [\cos 300^\circ + j \sin 300^\circ]
 \end{aligned}$$

algebraische Form:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{z}} &= 5 [0,5 + j(-0,866)] \\
 \underline{\underline{z}} &= 2,5 - j 4,33
 \end{aligned}$$

Exponentialform:

$$\underline{\underline{z}} = 5 \cdot e^{j 300^\circ}$$